

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математическая теория финансов
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Комбинаторика и цифровая экономика
	центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск"
	кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.В. Куликов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 30.01.2025

Аннотация

данный курс посвящен введению в современную теорию финансовых рынков и применение к ним основ финансовой математики. Основными «колоннами» финансовой математики являются: оптимальное распределение ресурсов; нахождение справедливых цен финансовых инструментов; измерение рисков и управление ими.

В курсе рассматриваются следующие вопросы:

введение базовых объектов теории финансов;

введение мер риска и их использование для решения различных задач теории финансов; рассмотрение базовых объектов финансовой математики (фундаментальной и рыночной цены финансовых активов, первичных финансовых инструментов (акций и облигаций), а также производных финансовых инструментов (форвардов, фьючерсов, свопов, различных видов опционов);

нахождение цен различных финансовых инструментов, используя теорию арбитража в общей модели, колл-пут паритет, цены имеющихся на рынке опционов и т.д.;

описание и нахождение справедливых цен различных производных ценных бумаг для моделей, часто используемых в финансовой математике.

В качестве задач также будут рассмотрены вопросы, часто задаваемые на собеседованиях в финансовых организациях, а также методы, используемые для оценки риска и нахождения цен финансовых инструментов.

Вероятностные методы имеют широчайшее применение в этой области, поэтому в курсе также будут введены и рассмотрены важные элементы теории мартингалов и выпуклого анализа, а именно, условные математические ожидания, теория мартингалов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

направлена на обучение основам финансовой математики и вероятностным методам, которые имеют широчайшее применение в этой области.

Задачи дисциплины

- научиться оперировать с базовыми объектами финансовой математики
- заложить основы теории условных математических ожиданий, теории мартингалов и приобрести навык нахождения интервалов справедливых цен различных платежных поручений (форвардов, фьючерсов и различных видов опционов);
- получить представление о базовых - - моделях, используемых для нахождения этих справедливых цен;
- научиться технике выпуклого анализа, используемой при доказательстве фундаментальной теоремы теории арбитража (ФТТА);
- заложить основы теории САРМ и основы решения некоторых оптимизационных задач в рамках этой теории;
- рассмотреть основы теории мер риска.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- экономические основы теории арбитража и риск-менеджмента;
- основные финансовые инструменты, используемые на финансовых рынках;
- основы теории CAPM, определение и особенности использования на финансовых рынках коротких продаж;
- основы диверсификации Марковитца.

уметь:

- находить условные математические ожидания, оперировать с мартингалами, находить справедливые цены и хеджирующие стратегии для различных платежных поручений, оценивать риск различных финансовых позиций с помощью $V@R$ и когерентных мер риска.

владеть:

- основами выпуклого анализа, используемыми при доказательстве фундаментальных теорем теории арбитража;
- техникой, используемой при нахождении интервалов справедливых цен и хеджирующих стратегий в различных моделях, используемых в математической теории финансов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Финансы и финансовая система	4	4		10
2	Введение финансовых инструментов	4	4		10
3	Теория CAPM	6	6		10
4	Условное математическое ожидание и введение в теорию мартингалов	4	4		15
5	Рассмотрение теории арбитража в одношаговой модели	6	6		15
6	Введение в теорию мер риска	6	6		15
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Финансы и финансовая система

Задачи финансовой системы, 3 колонны финансовой математики (размещение ресурсов, нахождение стоимости активов и управление рисками). Фундаментальная и рыночная цена финансовых активов. Принцип гиперболы в финансовой математике. Определение дисконтирования.

2. Введение финансовых инструментов

Первичные финансовые инструменты (акции и облигации). Производные финансовые инструменты (форварды, фьючерсы, свопы, различные виды опционов) и примеры нахождения их цен. Коллпут паритет и его использование при нахождении справедливых цен различных опционов.

3. Теория CAPM

Диверсификация Марковитца, определение и использование коротких продаж, задача среднedisперсионного анализа, введение CML, тангенциального портфеля и применение теории CAPM к нахождению фундаментальной стоимости акций.

4. Условное математическое ожидание и введение в теорию мартингалов

Введение условного математического ожидания и его свойства. Определение мартингала и примеры.

5. Рассмотрение теории арбитража в одношаговой модели

Определение отсутствия арбитража, доказательство 1-ой и 2-ой фундаментальной теоремы теории арбитража. Введение интервалов справедливых цен производных финансовых инструментов и примеры их нахождения.

6. Введение в теорию мер риска

$V@R$ как первая мера риска. Недостатки $V@R$. Свойства мер риска (диверсификация, положительная однородность, отношение частичного порядка, инвариантность относительно сдвига, инвариантность по распределению). Введение когерентных, выпуклых мер риска и их примеры.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная компьютером, возможностью онлайн-передачи информации и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в стохастические финансы. Дискретное время [Текст] : [учебник для вузов] / Г. Фёльмер, А. Шид ; пер. с англ. Ю. С. Мишуры, Г. М. Шевченко под ред. В. И. Аркина .— М. : МЦНМО, 2008 .— 496 с.

Дополнительная литература

Финансы [Текст] : учебник для вузов / П. И. Вахрин, А. С. Нешиной ; Рек.М-вом образования РФ .— 4-е изд., переработ. доп. — М : Дашков и К*, 2005 .— 526 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Различные Internet-источники, публикующие отчетность финансовых компаний (www.troika.ru, ...), а также сайты бирж, публикующие информацию о ходе торгов на финансовые инструменты (www.micex.ru, www.dowjones.com, ...).

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

различные Internet-источники, публикующие отчетность финансовых компаний (www.troika.ru, ...), а также сайты бирж, публикующие информацию о ходе торгов на финансовые инструменты (www.micex.ru, www.dowjones.com)

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

Литература для самостоятельной работы студента:

1. З. Боди , Р. Мертон, «Финансы», Москва: Вильямс, 2003.
2. С.В. Жуленев, «Стохастическая финансовая математика. Финансовые рынки в дискретном случае. Курс лекций», Москва, МГУ, 2007.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Комбинаторика и цифровая экономика
центр дополнительного, дополнительного профессионального и
онлайн-образования "Пуск"
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.В. Куликов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая теория финансов» обучающийся должен:

знать:

- экономические основы теории арбитража и риск-менеджмента;
- основные финансовые инструменты, используемые на финансовых рынках;
- основы теории CAPM, определение и особенности использования на финансовых рынках коротких продаж;
- основы диверсификации Марковитца.

уметь:

- находить условные математические ожидания, оперировать с мартингалами, находить справедливые цены и хеджирующие стратегии для различных платежных поручений, оценивать риск различных финансовых позиций с помощью $V@R$ и когерентных мер риска.

владеть:

- основами выпуклого анализа, используемыми при доказательстве фундаментальных теорем теории арбитража;
- техникой, используемой при нахождении интервалов справедливых цен и хеджирующих стратегий в различных моделях, используемых в математической теории финансов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Перечень типовых вопросов -

1. Рынок и его участники. Финансовая система. Виды активов. Нахождение справедливых форвардных цен.
2. Основные задачи математической теории финансов.
3. Виды риска и способы управления. Определение $V@R$.
4. Дисконтирование в дискретном и непрерывном времени (безрисковая % ставка, чистая дисконтированная стоимость, темпы инфляции, реальная % ставка и ее расчет через безрисковую % ставку и темпы инфляции).
5. Расчет фундаментальной стоимости акций через ее предполагаемые дивиденды. Непостоянная процентная ставка, форвардная и мгновенная % ставки. Расчет цен облигации через % ставки.
6. Форварды, фьючерсы и свопы. Нахождение форвардного обменного курса, цены свопа на иностранную валюту и % ставку.
7. Европейские опционы колл и пут. Нахождение тривиальных интервалов справедливых цен для опционов колл и пут.
8. Колл-пут паритет и его доказательство. Тривиальные интервалы справедливых цен для американских опционов колл.
9. Американские опционы колл и пут. Доказательство неоптимальности предъявлять американский опцион к исполнению до конечного момента, если по базовому активу нет дивидендов.

10. Поведение цен европейских и американских опционов колл и пут в зависимости от времени погашения, страйка, начальной цены базового актива.
11. Диверсификация Марковитца, норма прибыли, постановка задачи среднedisперсионного анализа. Доказательство того, что среднее квадратическое отклонение удовлетворяет свойству диверсификации.
12. Решение задачи выбора оптимального портфеля в модели CAPM (capital asset pricing model, модель ценообразования активов) с безрисковым активом. Доказательство существования тангенциального портфеля. Определение и свойства рыночного портфеля.
13. Связь нормы прибыли актива и рыночного портфеля и применение к нахождению нормы рыночной капитализации акций.
14. Теория CAPM (capital asset pricing model, модель ценообразования активов) без коротких продаж. Парадоксы и способы их разрешения.
15. Условное математическое ожидание и мартингалы. Определение, свойства и примеры.
16. Два эквивалентных определения броуновского движения.
17. Теорема Дуба об остановке и ее применение к решению задачи о разорении.
18. Примеры соображения безарбитражности. Нахождение справедливых цен платежных поручений в двухточечной модели.
19. Определение отсутствия арбитража в одношаговой модели и доказательство ФТТА.
20. Справедливые цены платежных поручений (доказательство эквивалентности 2 определений) в одношаговой модели и способы их нахождения.
21. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна, существование единственной мартингальной меры и хеджирующей стратегии для любого платежного поручения в данной модели. Упрощение алгоритма нахождения хеджирующей стратегии в случае европейских опционов.
22. Одношаговая модель с опционами и нахождение интервалов справедливых цен платежных поручений в данной модели.
23. $V@R$, $RAROC$ - определение, свойства и способы их нахождения в гауссовском случае.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Дисконтирование в дискретном времени (безрисковая % ставка, чистая дисконтированная стоимость, темпы инфляции, реальная % ставка).
2. Дисконтирование в непрерывном времени (безрисковая % ставка, дисконтированная выплата, темпы инфляции, реальная процентная ставка, рыночная норма капитализации).
3. Расчет фундаментальной стоимости акций через ее предполагаемые дивиденды. Непостоянная процентная ставка, форвардная и мгновенная % ставки. Расчет цен облигации через % ставки.
4. Форварды, фьючерсы, свопы и нахождение их справедливых цен.
5. Европейские и американские опционы колл и пут и нахождение интервалов справедливых цен.
6. Условное математическое ожидание и мартингалы. Определение, свойства и примеры.
7. Примеры соображения безарбитражности.
8. Определение отсутствия арбитража в одношаговой модели и доказательство ФТТА.
9. Справедливые цены платежных поручений в одношаговой модели и способы их нахождения.
10. Основы теории измерения риска.
11. Виды риска: рыночные, кредитные, операционные и способы их оценивания.
12. $V@R$, Tail $V@R$ как риск-меры и их свойства.
13. Моделирование цены свопа или спрэда на валютном рынке.
14. Геометрическое броуновское движение как модель, дающая единственную справедливую цену для вторичных финансовых инструментов.

Критерии оценивания

отлично (10) - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

отлично (9) - выставляется студенту, показавшему свободное оперирование знаниями учебной программы дисциплины, выполнение заданий творческого характера.

отлично (8) - выставляется студенту, показавшему владение программным учебным материалом с наличием несущественных ошибок в действиях, самостоятельно исправляемых учащимся.

хорошо (7) - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускается в ответе или в решении задач некоторые неточности.

хорошо (6) - выставляется студенту если он осознает воспроизведение программного учебного материала, в том числе и различной степени сложности, с несущественными ошибками, затруднения в применении отдельных навыков.

хорошо (5) - выставляется студенту если теоретическое содержание освоено не полностью, некоторые практические навыки сформированы недостаточно, в некоторых случаях были допущены ошибки.

удовлетворительно (4) - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

удовлетворительно (3) - выставляется студенту в случае большого количества недочетов и неправильных ответов, а также пассивной работе в ходе занятий, многие учебные задания не выполнены.

неудовлетворительно (2) - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

неудовлетворительно (1) - выставляется студенту, который не освоил теоретическое и практическое содержание курса, все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференциального зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.